

LBRIS

We know
books

CRISTINA MARIN

Un strop de
MATEMATICĂ

Geometrie plană... pe șevalet



EDITURA PENTRU ARTĂ ȘI LITERATURĂ
București, 2023

CUPRINS

Cuvânt-înainte	7
Punctul	9
Dreapta.....	10
Semidreapta	12
Segmentul de dreaptă.....	13
Postulatul paralelelor	14
Secțiunea de aur	15
Unghiul	16
Măsura unui unghi	18
Unghiuri congruente	19
Bisectoarea unui unghi propriu.....	20
Mediatoarea unui segment.....	24
Unghiuri cu laturile respectiv paralele	25
Planul.....	26
Cercul	27
Teoreme referitoare la cerc.....	29
Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc.....	30
Pozițiile relative a două cercuri	31
Triunghiul	34
Linii (drepte) importante în triunghi	37
Medianele	37
Bisectoarele.....	38

Înălțimile	40
Mediatoarele.....	41
Calculul ariei unui triunghi.....	42
Despre congruență.....	43
Congruența triunghiurilor	44
Despre asemănare	45
Despre simetrie.....	46
Despre axiomă și teoremă	50
Linie mijlocie	51
Teorema lui Thales	52
Teorema fundamentală a asemănării	52
Unghi exterior unui triunghi	52
Triunghiul dreptunghic.....	53
Teoreme referitoare la cerc.....	59
Patrulater inscriptibil.....	60
Poligonul regulat înscris în cerc.....	60
Triunghiul echilateral înscris în cerc.....	61
Pătratul înscris în cerc	61
Hexagonul înscris	62
Drepte coplanare intersectate de o transversală.....	63
Poligoane.....	63
Paralelogramul	65
Dreptunghiul	66
Rombul	67
Pătratul.....	68
Trapezul.....	69
Probleme.....	71

Să considerăm un **punct**. Pune creionul bine ascuțit pe hârtie și apasă un pic. A rămas o urmă. Acesta este punctul căruia nu îi putem asocia nicio dimensiune.

Punctul este o noțiune primară, ni-l imaginăm, spre exemplu, precum urma lăsată pe hârtie de apăsarea unui vârf de creion foarte bine ascuțit sau ca înțepătura unui vârf de ac.

Punctul se reprezintă în desen așa:

× A

* Îl notăm cu o literă mare de tipar $A, B, C, \dots, M, N, \dots$ și considerăm că nu are nicio dimensiune.

* Putem spune că și punctul este o figură geometrică (o mulțime cu un singur element).

Desigur, gândul ne duce la punctul plastic, care are rolul de a construi forme sau poate doar să acopere suprafețe. Punctul plastic pornește de la definiția punctului din geometrie.

Uneori se vorbește despre două **puncte confundate**.

În desen, această situație se prezintă astfel:

× A, B

Punctul în artă poate să reprezinte începutul unei creații, în jurul lui dezvoltându-se compoziția sau punctul bine plasat într-o operă poate să devină centrul de interes, focalizând atenția. Punctul folosit cu măiestrie poate reda contururi, mișcare, forme, texturi și umbre.

Damien Hirst, artist contemporan, a așezat puncte colorate realizând diferite forme. Lucrările de acest gen au fost încadrate în tendința numită în plastică ARTĂ SPOT.

Punctul este *mic*, dar este extrem de important.

Arhimede spunea: „Dați-mi un **punct** de sprijin și voi muta Pământul din loc!”

Putem menționa și valoarea unui punct de vedere într-o conversație!“ ☺

Desenează 30 de puncte, 10 în culori reci, 10 în culori calde și 10 alternând dimensiunea punctului.

Ți s-au părut multe puncte de desenat? În anul 2012, Miguel Endara a realizat un portret utilizând peste 3 milioane de puncte!

Trasează conturul unei flori cu 7 petale. Umples fiecare petală cu puncte în culorile tale preferate.

Dacă vom încerca să punem punct lângă punct, des, cât se poate de des, vom obține o dreaptă.

Dreapta este **nelimitată** la ambele capete. Spunem că dreapta este **infinită**.

Dreapta este o noțiune primară, ne-o imaginăm, spre exemplu, ca pe un fir de ață foarte subțire și foarte bine întins.

Dreapta se reprezintă în desen așa:



O notăm uneori cu literă mică: a, b, c, d, \dots

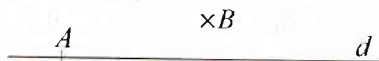
* Gândim că dreapta este lipsită de grosime și că este nesfârșită, adică nu are capete. Deci dreapta **nu** poate fi măsurată.

Pentru artiști: Linia este urma unui punct în mișcare.

Dacă vom limita dreapta la unul dintre capete cu o paranteză rotundă, vom obține o semidreaptă deschisă; dacă paranteza este pătrată, se consideră inclus punctul acoperit de paranteza pătrată.

Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă

Față de o dreaptă d , un punct A se poate găsi pe ea (poate să-i aparțină), iar un alt punct B poate să-i fie exterior (să nu-i aparțină).



- * Simbolic, apartenența punctului la dreaptă se scrie astfel: $A \in d$.
- * Simbolic, faptul că punctul **nu** aparține dreptei se scrie astfel: $B \notin d$.
- * **Două puncte distincte determină unic o dreaptă.**

Direcție și sens

Dreapta determinată de punctele A și B – de exemplu – se poate numi dreapta AB sau dreapta BA . Se mai spune **direcția AB** .

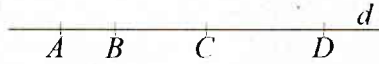
- * O dreaptă indică **o direcție**.
- * Direcția AB se poate parcurge în sensul $A \rightarrow B$, dar și în sensul $B \rightarrow A$. Orice direcție are două **sensuri** opuse.



Puncte coliniare

Punctele care aparțin aceleiași drepte se numesc **puncte coliniare**.

În desenul următor punctele A , B , C și D sunt coliniare.

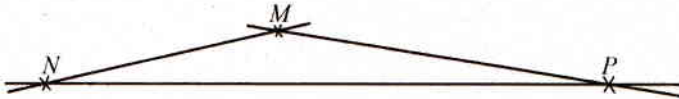


$$A \in d, B \in d, C \in d, D \in d.$$

Oricare două dintre punctele A , B , C , D din desenul de mai sus determină dreapta d , căreia i se mai poate spune dreapta AB , AC , AD , BC , BD sau CD .

Puncte necoliniare

Dacă oricare dintre punctele M , N , P este exterior dreptei determinate de celelalte două, atunci cele trei puncte se numesc **puncte necoliniare**.



$$M \notin NP, N \notin MP, P \notin MN.$$

Altfel spus, trei sau mai multe puncte sunt necoliniare dacă nu există o dreaptă care să le conțină pe toate.

Pozițiile relative a două drepte

Drepte confundate

Două drepte care conțin aceleași puncte s-a convenit să se numească **drepte identice** sau **drepte confundate**.

Drepte concurente

Dreptele a și b din desenul de mai jos au un singur punct comun, punctul M , și vom nota $M \in a, M \in b$.



Dreptele a și b se numesc **drepte concurente**, notând $a \cap b = \{M\}$.

Fie un punct pe foaia ta de lucru. Trasează 36 de drepte concurente în punctul respectiv. Încearcă să realizezi un desen bicolor, alternând succesiv culorile dreptelor.

Apoi privește cele două imagini și realizează imaginea geometrică a pădăiei, exemplu de perfecțiune geometrică în natură.



* Punctul M se numește **punctul de intersecție** al dreptelor concurente a și b .

Drepte paralele

Două drepte distincte (diferite) a și b conținute în același plan, care nu au niciun punct comun, se numesc **drepte paralele**.



În această situație se scrie $a \parallel b$. Evident $a \cap b = \emptyset$.

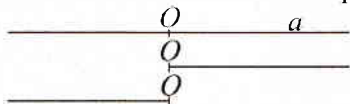
Trasează două drepte paralele de culoare roșie și două drepte paralele verzi folosind rigla și echerul.

Fie o dreaptă (d). Printr-un punct exterior acesteia trasează o paralelă la dreapta (d). Apoi, cu creioane colorate diferite, fără instrumentele geometrice ajutătoare construiește, 5 drepte paralele la dreapta dată (d), având între ele distanța de 2 mm. La final, măsoară cu rigla cât de precis este desenul tău, dacă ai reușit să păstrezi distanța între drepte constantă. Dacă nu, repetă acest exercițiu în orice moment de relaxare!

SEMIDREAPTA

O **semidreaptă** este o porțiune dintr-o dreaptă mărginită de un punct al ei, care se numește **originea** semidreptei.

* Dacă a este o dreaptă și $O \in a$, atunci există două semidrepte, și nu mai multe, cu originile în O și care să fie incluse în dreapta a .



* Semidreapta, ca și dreapta, este nesfârșită și de aceea nu poate fi măsurată. Fiind date două puncte distincte A și B , să considerăm dreapta AB



și semidreapta inclusă în această dreaptă, cu originea în A și careia îi aparține punctul B



* Această semidreaptă se notează cu $[AB$ dacă se consideră că punctul A aparține semidreptei și cu $(AB$ dacă se consideră că A nu aparține semidreptei.

* $[AB$ se numește **semidreaptă închisă**.

* $(AB$ se numește **semidreaptă deschisă**. $[AB - (AB = \{A\}$.

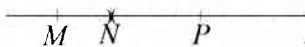
* Au loc incluziunile: $(AB \subset [AB \subset AB$.

* Pe desenul de mai sus se poate vorbi și despre semidreapta cu originea în B și careia îi aparține punctul A .

$[BA -$ semidreaptă închisă și $(BA -$ semidreaptă deschisă. $(BA \subset [BA \subset BA$.

Semidrepte opuse

Dacă M, N, P sunt trei puncte coliniare, atunci semidreptele $[NP$ și $(NM$ se numesc **semidrepte opuse**.



SEGMENTUL DE DREAPTĂ

Segmentul de dreaptă este o porțiune dintr-o dreaptă cuprinsă între două puncte ale ei, numite extremitățile lui.



* Segmentul se notează $[AB]$ – segment închis la ambele capete – când se consideră că segmentul își conține extremitățile.

* Se mai notează (AB) – segment deschis la ambele capete – când se consideră că extremitățile nu aparțin segmentului.

- * $[AB] \subset AB$, segmentul $[AB]$ este inclus în dreapta AB .
- * A măsura un segment înseamnă a-l compara cu altul, considerat a fi unitatea de măsură.
- * Rezultatul acestei comparații se numește **lungimea segmentului**.
- * Două segmente (ambele închise sau ambele deschise) care au lungimile egale se numesc **segmente congruente**.
- * Dacă două segmente $[AB]$ și $[CD]$ au lungimile egale, se scrie $[AB] \equiv [CD]$.
- * Relația de congruență a segmentelor are proprietatea de **simetrie**. Dacă $[AB] \equiv [CD]$, atunci și $[CD] \equiv [AB]$.
- * Relația de congruență a segmentelor este **tranzitivă**.
- Dacă $[AB] \equiv [CD]$ și $[CD] \equiv [MN]$, atunci $[AB] \equiv [MN]$.
- * Dacă punctele A, M, B , distincte două câte două, sunt coliniare și dacă lungimea AM este egală cu lungimea MB , adică $[AM] \equiv [MB]$, atunci punctul M se numește mijlocul segmentului $[AB]$.

Trasează forma la care te gândești acum cu ajutorul dreptelor, al semidreptelor și al segmentelor. Apoi colorează suprafețele mărginite!

Fascicul de drepte

Mulțimea dreptelor dintr-un plan care au un punct comun se numește **fascicul de drepte**.

- * Punctul comun tuturor dreptelor se numește **suportul fascicului**.

Înainte de erei noastre, matematicianul grec Euclid a realizat o colecție de 13 cărți cunoscute sub numele de *Elementele*. El a pus bazele geometriei pe care o studiem în această lucrare, geometria euclidiană, al cărui părinte este. Marele savant a fundamentat gândirea matematică, conceptele și metodele matematice.

POSTULATUL PARALELELOR

Acest postulat mai este cunoscut și sub denumirea de „Postulatul (axioma) lui Euclid“.

Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă.

Este cunoscut faptul că orice artist plastic are mereu un caiet de schițe. V-ați întrebat de ce? Artistul dorește să surprindă momentul unic, de multe ori irepetabil. Pentru păstrarea imaginii văzute el, va realiza crochiul, cunoscut și